



Ciências
ULisboa

Departamento de Física

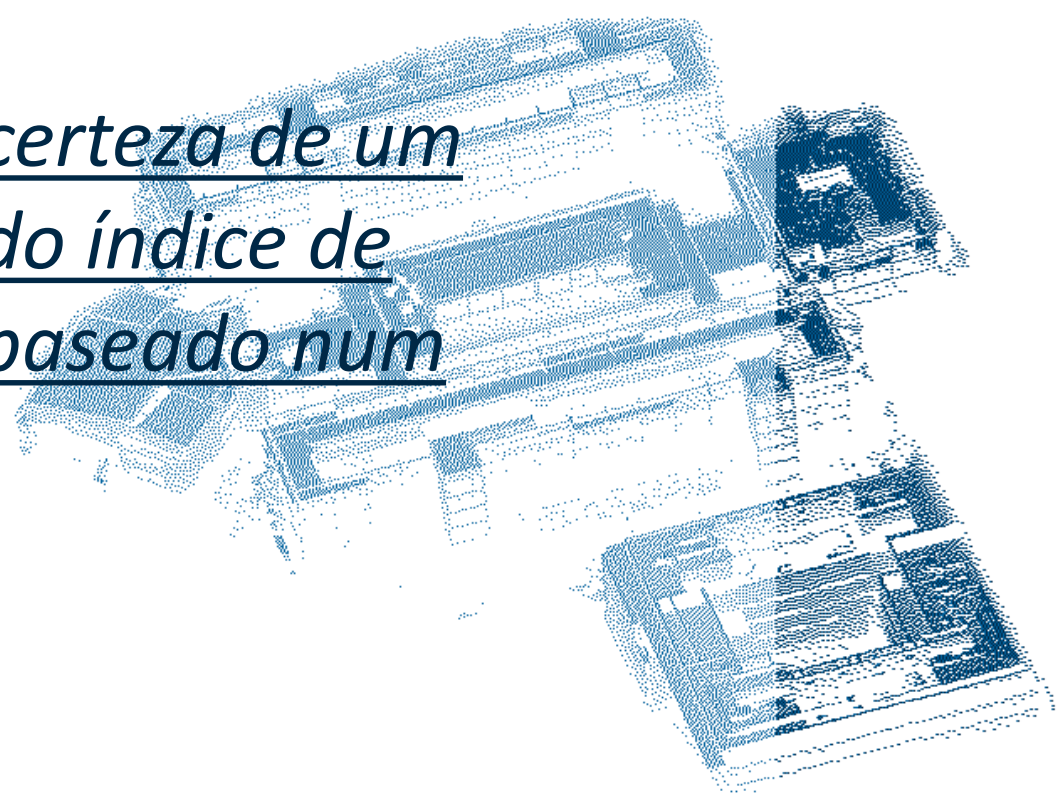
Engenharia de Medida

Trabalho Prático:

Caracterização da incerteza de um sistema de medição do índice de refração de líquidos baseado num distanciómetro laser

Alexandre Cabral

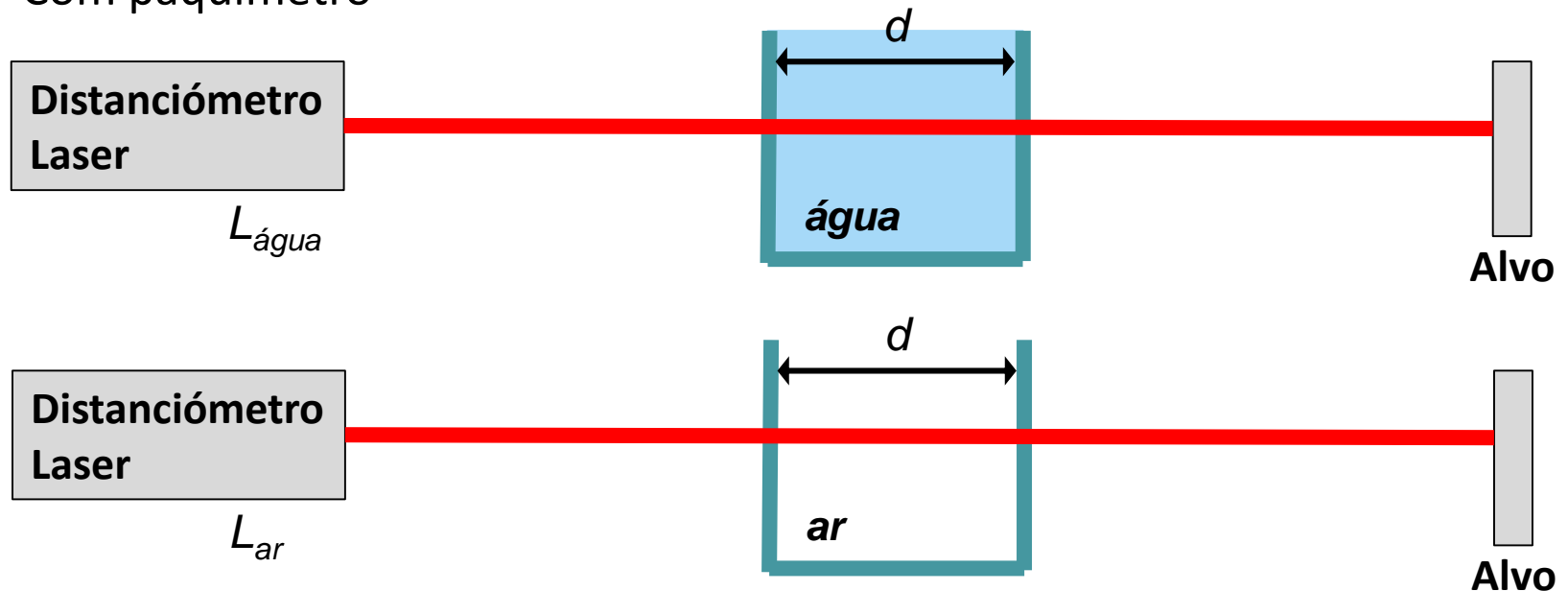
Alexandre.Cabral@fc.ul.pt



Trabalho Prático — medição do índice de refração com um distanciómetro laser

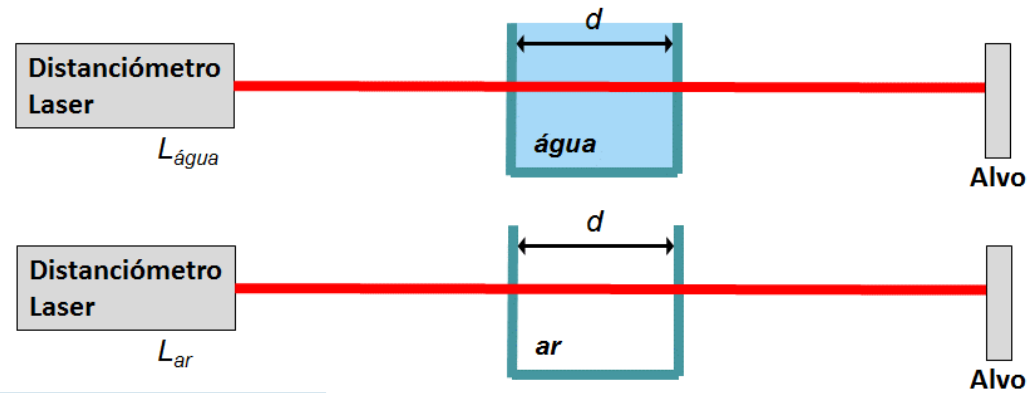
Objetivo:

- Medir o índice de refração da água com uma incerteza inferior a 5%,
- Verificar a possibilidade de otimizar o sistema para medir com uma incerteza inferior a **1%** utilizando os mesmos equipamentos de medida. **Justificando!**
- Pares de medidas com e sem água no recipiente com distância interna d permitem obter ΔL
- $\Delta L = L_{\text{água}} - L_{\text{ar}}$ — Com Distanciómetro Laser
- d — Com paquímetro



Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L \cdot n}{c}$$



$$L_{\text{medido}_{ar}} = \Delta t_{ar} \cdot \frac{c}{n_{ar}} = \left(\frac{d \cdot n_{ar}}{c} + \frac{L' \cdot n'}{c} \right) \cdot \frac{c}{n_{ar}}$$

$$L_{\text{medido}_{agua}} = \Delta t_{agua} \cdot \frac{c}{n_{ar}} = \left(\frac{d \cdot n_{agua}}{c} + \frac{L' \cdot n'}{c} \right) \cdot \frac{c}{n_{ar}}$$

$$L_{\text{medido}_{agua}} - L_{\text{medido}_{ar}} = \Delta t_{agua} \cdot \frac{c}{n_{ar}} = \left(\frac{d \cdot n_{agua}}{c} - \frac{d \cdot n_{ar}}{c} \right) \cdot \frac{c}{n_{ar}}$$

$$\Delta L = \left(\frac{d \cdot n_{agua} - d \cdot n_{ar}}{n_{ar}} \right)$$

$$n_{agua} = \frac{\Delta L}{d} n_{ar} + n_{ar}$$

Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

Modelo Matemático:

$$n_{agua} = \frac{\Delta L}{d} n_{ar} + n_{ar}$$

Exemplo de medições:

- ΔL – Com Distanciómetro Laser
- d – Com Paquímetro

Medição	d (mm)	Medição	$L_{\text{água}}$ (mm)	L_{ar} (mm)	ΔL (mm)
1		1			
2		2			
3		3			
4		4			
5		5			
6		6			
7		7			
8		8			
9		9			
10		10			
...		...			

Trabalho Prático — medição do índice de refração com um distanciómetro laser

■ $n_{\text{ar}} = 1,00027 \pm 0,00002$

a $20^{\circ}\text{C} \pm 10^{\circ}\text{C}$ e $100.4 \text{ kPa} \pm 5 \text{ kPa}$ (a qualquer %HR)

(nota o que surge em tabelas de 1,00029 refere-se ao ar a 0°C)

■ Paquímetro Chinês

Gama de medição de 0 – 200 mm – Divisão 0,05 mm

Incerteza **U = 0,1 mm (k=2)** com correção nula

É possível obter uma incerteza $U = 0,05 \text{ mm}$ (k=2) com nova calibração

■ Calibração do Distanciómetro Laser **U = 1,0 mm (k=2)** – Divisão 1 mm

(não é necessário ter em conta a correção uma vez que se utilizarão diferenças de medições)

É possível obter uma incerteza $U = 0,30 \text{ mm}$ (k=2) com nova calibração

Na otimização do sistema poderá alterar todas as condições da medição (como por exemplo o recipiente) com a exceção dos equipamentos de medição que terão de ser apenas os dois apresentados (podendo utilizá-los nas suas configurações otimizadas). Quanto à componente da repetibilidade, pode considerar que o desvio padrão obtido para um número superior de medidas (relativamente às que foram realizadas) será o mesmo.

- O trabalho deverá ser escrito sob a forma de um pequeno relatório de medição, indicando o que se pretende medir, como, e qual o modelo matemático.
- Deverão ser descritos os resultados obtidos (com balanços de incerteza)
- Na otimização, todas as opções e o resultado esperado deverão ser justificados.
- As conclusões são fundamentais!
- A entrega deverá ser feita até dia 17 de Abril para o email Alexandre.Cabral@fc.ul.pt (pdf)
- ... *Sempre que precisem estou cá para tirar dúvidas!*

Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

- Com os dados referidos, obtém-se uma incerteza (expandida, $k=2,16$ $v_{ef} = 17$) de 3,1%, como indicado no balanço de incerteza. O sistema é capaz de medir o índice de refração da água com uma incerteza de 5%!

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Medição do Índice de Refração da água com um Distanciómetro Laser

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Grandeza	Valor Un.	Fonte de Incerteza	Desvio Padrão Un.	N. med.	Valor da comp. Un.	Tipo de avaliação	Divisor	Incerteza padrão Un. $[u(x_i)]$	Coefficient e sensib. Un. $[c_i]$	Comp. quadrática Un. $[c_i \cdot u(x_i)]^2$	graus lib. $[v_i]$	% da comp.
ΔL	39.6 mm	Dispersão	7.52 mm	14	2.010 mm	A / normal	1.00	2.010 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	3.22E-04	13	86%
		Resolução	-		0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	2%
		Resolução	-		0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	2%
		Cert. Calib.	-		1.000 mm	B / normal	2.00	0.500 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.99E-05	1E+99	5%
		Cert. Calib.	-		1.000 mm	B / normal	2.00	0.500 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.99E-05	1E+99	5%
d	112.1 mm	Dispersão	0.02 mm	10	0.008 mm	A / normal	1.00	0.008 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	5.81E-10	9	0%
		Resolução	-		0.025 mm	B / retangular	1.73	0.014 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.07E-09	1E+99	0%
		Cert. Calib.	-		0.100 mm	B / normal	2.00	0.050 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.49E-08	1E+99	0%
nar	1.00027	Modelo			2.0E-05	B / retangular	1.73	1.2E-05	1.35E+00	2.44E-10	1E+99	0%

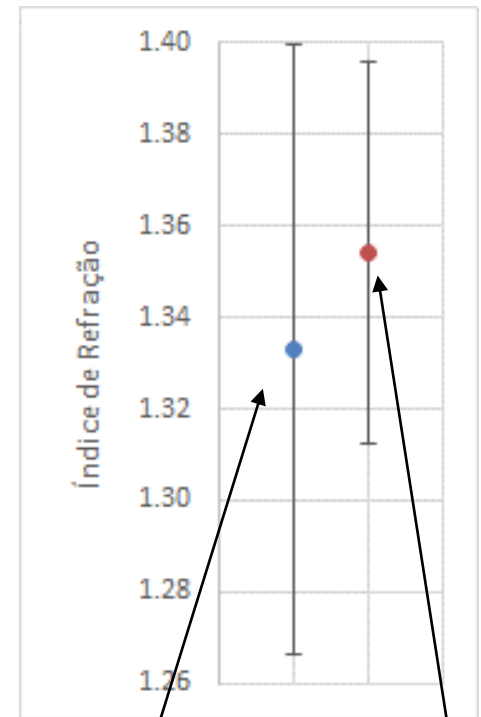
n_{água} 1.354
± 0.042 3.1%

A incerteza expandida apresentada, está expressa pela incerteza-padrão multiplicada pelo fator de expansão $k=2.16$, o qual para uma distribuição-t com $v_{ef} = 17$ graus de liberdade efetivos corresponde a uma probabilidade de 95 %, aproximadamente. A incerteza foi calculada de acordo com o documento EA-04/02.

	Σ	3.75E-04	
	Incerteza padrão combinada, u_c	1.94E-02	N. graus lib. 17
	Fator de expansão, k	2.16	
	Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	0.042	(Absoluta)
	Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	3.1%	(Relativa)

Análise dos resultados

- O sistema cumpre o requisito! O valor do índice de refração da água está dentro do esperado (1,33).
- O Erro do valor medido, quando comparado com o valor conhecido é inferior à incerteza, indicando que não há componentes de erro sistemático relevantes desconhecidos

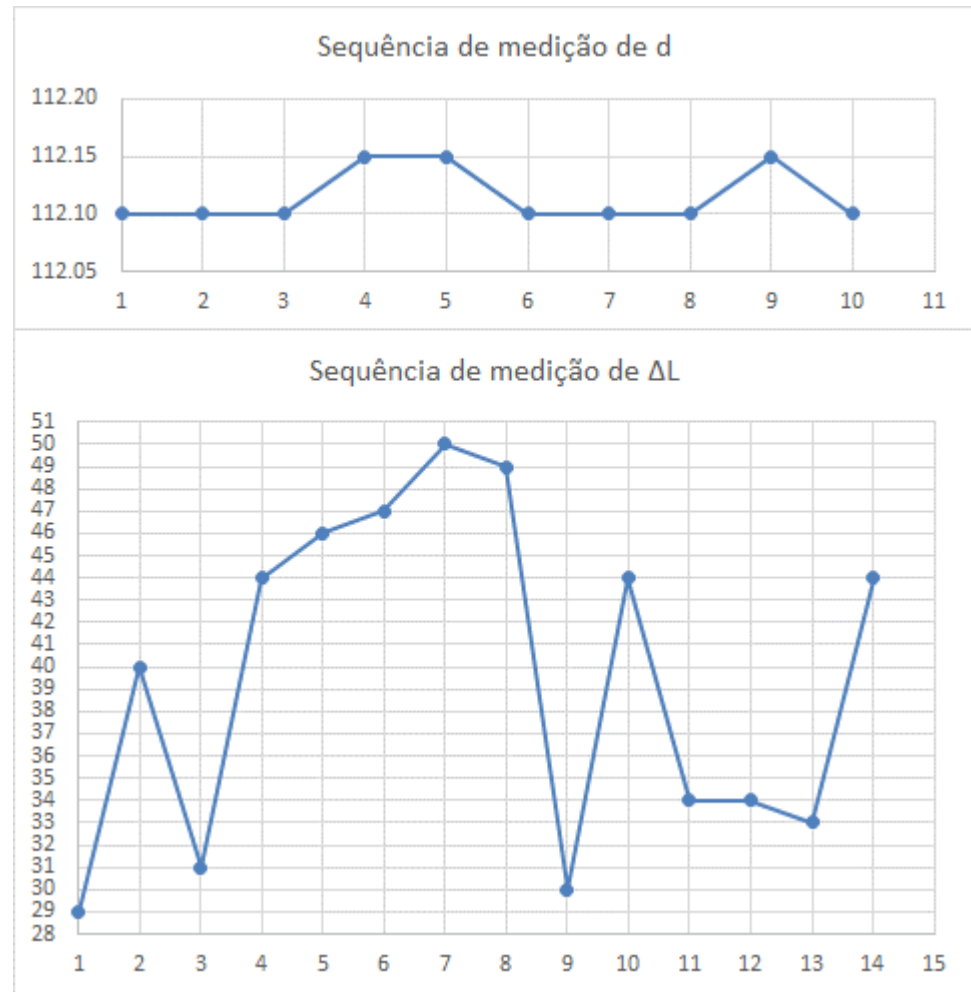


Valor medido e incerteza

Índice da água e tolerância (5%)

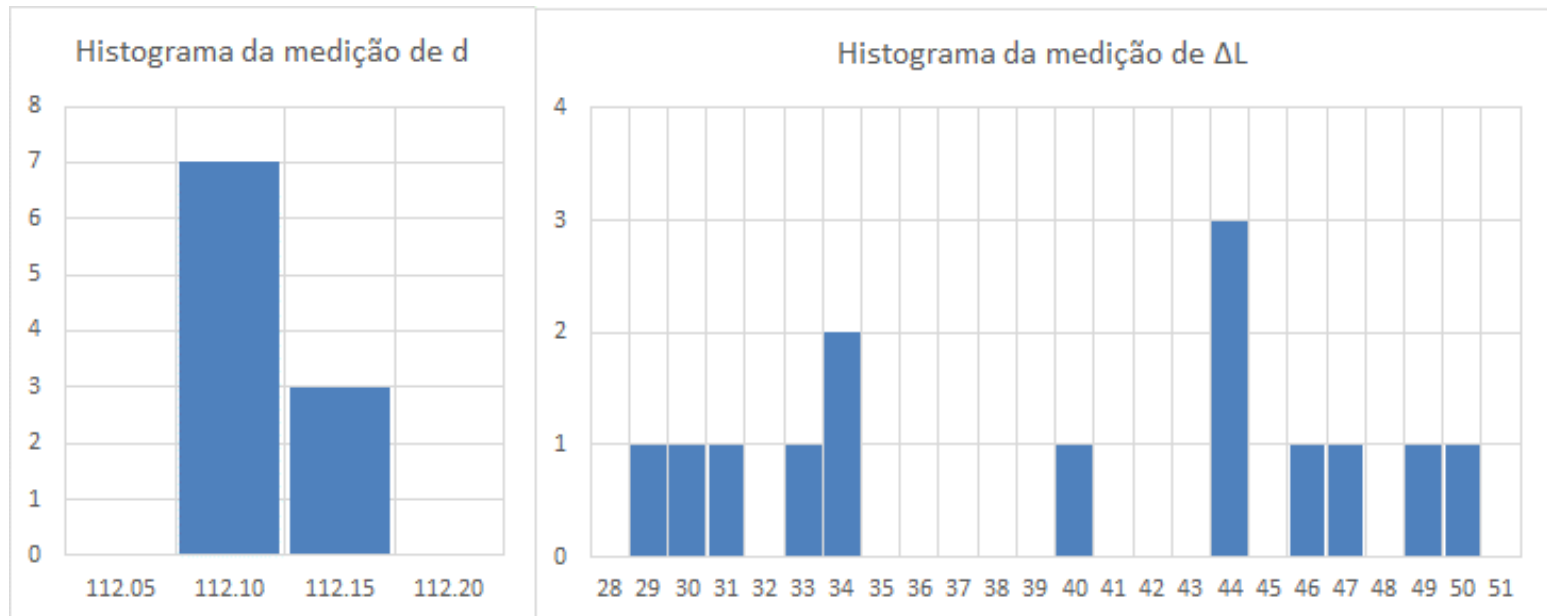
Análise dos resultados

- A sequência das medições indica que não existiram nenhuma tendência que não a aleatória.



Análise dos resultados

- O histograma das medições mostra claramente que o número de medições de ΔL não foi suficiente uma vez que ainda está claramente longe dum perfil normal.
- A dispersão dos resultados é considerável quando comparada com a resolução do equipamento.



Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

Análise do Balanço de Incertezas

- Apenas a medição de ΔL contribui para a incerteza final
- A dispersão dos resultados é a maior contribuição.
- O Desvio padrão é considerável quando comparado com os valores da resolução e da calibração do distanciómetro ... algo no sistema de medição está a introduzir essa dispersão ... deverá ser alvo de estudo futuro.

Medição do Índice de Refração da água com um Distanciómetro Laser

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Grandeza	Valor Un.	Fonte de Incerteza	Desvio Padrão Un.	N. med.	Valor da comp. Un.	Tipo de avaliação	Divisor	Incerteza padrão Un. $[u(x_i)]$	Coefficient e sensib. Un. $[c_i]$	Comp. quadrática Un. $[c_i \cdot u(x_i)]^2$	graus lib. $[v_i]$	% da comp.
ΔL	39.6 mm	Dispersão	7.52 mm	14	2.010 mm	A / normal	1.00	2.010 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	3.22E-04	13	86%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	2%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	2%
		Cert. Calib.	-	-	1.000 mm	B / normal	2.00	0.500 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.99E-05	1E+99	5%
		Cert. Calib.	-	-	1.000 mm	B / normal	2.00	0.500 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.99E-05	1E+99	5%
d	112.1 mm	Dispersão	0.02 mm	10	0.008 mm	A / normal	1.00	0.008 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	5.81E-10	9	0%
		Resolução	-	-	0.025 mm	B / retangular	1.73	0.014 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.07E-09	1E+99	0%
		Cert. Calib.	-	-	0.100 mm	B / normal	2.00	0.050 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.49E-08	1E+99	0%
nar	1.00027	Modelo	-	-	2.0E-05	B / retangular	1.73	1.2E-05	1.35E+00	2.44E-10	1E+99	0%

n_{água} 1.354

± 0.042 3.1%

Σ 3.75E-04

Incerteza padrão combinada, u_c 1.94E-02

Fator de expansão, k 2.16

N. graus lib. 17

A incerteza expandida apresentada, está expressa pela incerteza-padrão multiplicada pelo fator de expansão $k=2.16$, o qual para uma distribuição-t com

11 = 17 graus de liberdade efetivos corresponde a uma probabilidade de 95 %, aproximadamente. A incerteza foi calculada de acordo com o documento EA-04/02.

Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U 0.042 (Absoluta)

Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U 3.1% (Relativa)

OPTIMIZAÇÃO

$$n_{agua} = \frac{\Delta L}{d} n_{ar} + n_{ar}$$

- Como se pode observar no BI anterior, a componente, a influência das componentes de incerteza em d é tão pequena que não vale a pena alterá-las.
- Para ΔL :
 - A resolução é fixa.
 - É possível melhorar a calibração.
 - Pode diminuir-se a componente da Dispersão (ou repetibilidade) com mais medições.
- Verifica-se que só com um número de medições de ΔL igual ou superior a 160 seria possível reduzir a incerteza abaixo de 1%.
- Este número de medições não é praticável!
(a 2 medições por minuto seriam quase uma hora e meia de medições ... a meia hora será um limite razoável ... 60 medições)
... este aspeto é claramente discutível.

Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

OPTIMIZAÇÃO

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Medição do Índice de Refração da água com um Distanciómetro Laser

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Grandeza	Valor Un.	Fonte de Incerteza	Desvio Padrão Un.	N. med.	Valor da comp. Un.	Tipo de avaliação	Divisor	Incerteza padrão Un. $[u(x_i)]$	Coefficient e sensib. Un. $[c_i]$	Comp. quadrática Un. $[c_i \cdot u(x_i)]^2$	graus lib. $[v_i]$	% da comp.
ΔL	39.6 mm	Dispersão	7.52 mm	160	0.595 mm	A / normal	1.00	0.595 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	2.81E-05	159	63%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	15%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	6.63E-06	1E+99	15%
		Cert. Calib.	-	-	0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.79E-06	1E+99	4%
		Cert. Calib.	-	-	0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	8.92E-03 mm ⁻¹	1.79E-06	1E+99	4%
d	112.1 mm	Dispersão	0.02 mm	10	0.008 mm	A / normal	1.00	0.008 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	5.81E-10	9	0%
		Resolução	-	-	0.025 mm	B / retangular	1.73	0.014 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.07E-09	1E+99	0%
		Cert. Calib.	-	-	0.100 mm	B / normal	2.00	0.050 mm	-3.15E-03 mm ⁻¹	2.49E-08	1E+99	0%
nar	1.00027	Modelo	-	-	2.0E-05	B / retangular	1.73	1.2E-05	1.35E+00	2.44E-10	1E+99	0%
n_{água} 1.354 ± 0.013 0.99%										Σ	4.50E-05	
										Incerteza padrão combinada, u_c	6.71E-03	N. graus lib.
										Fator de expansão, k	2.01	406
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	0.013	(Absoluta)
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	1.0%	(Relativa)

OPTIMIZAÇÃO

$$n_{agua} = \frac{\Delta L}{d} n_{ar} + n_{ar}$$

- Como se pode observar no BI anterior, a influência das componentes de incerteza em d é tão pequena que não vale a pena alterá-las.
- Para ΔL :
 - A resolução é fixa.
 - É possível melhorar a calibração.
 - Pode diminuir-se a componente da Dispersão (ou repetibilidade) com mais medições.
- Verifica-se que só com um número de medições de ΔL igual ou superior a 160 seria possível reduzir a incerteza abaixo de 1%.
- Este número de medições não é praticável!
(a 2 medições por minuto seriam quase uma hora e meia de medições ... a meia hora será um limite razoável ... 60 medições)
... este aspeto é claramente discutível.

OPTIMIZAÇÃO

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

- O que mais influencia valor da incerteza?
... a sensibilidade desta às diversas componentes!!!
- o coeficiente de sensibilidade de ΔL é (n_{ar}/d) ... ou seja:
quanto maior o d , menor o peso das componentes em ΔL
e também menor o peso das componentes em d cujo coeficiente é $(\Delta L n_{\text{ar}}/d^2)$.
- até quanto posso aumentar d , diminuindo a contribuição das componentes ΔL ?
- Usando o paquímetro que mede até 200 mm, d no máximo pode ser 200 mm.
- Como simular o aumento de d : se d aumenta, ΔL aumenta proporcionalmente.
- para $d = 200$ mm, basta realizar 40 medições para ter uma incerteza expandida de 0,98% ... ou seja <1%

Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciómetro laser

OPTIMIZAÇÃO

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Medição do Índice de Refração da água com um Distanciómetro Laser

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

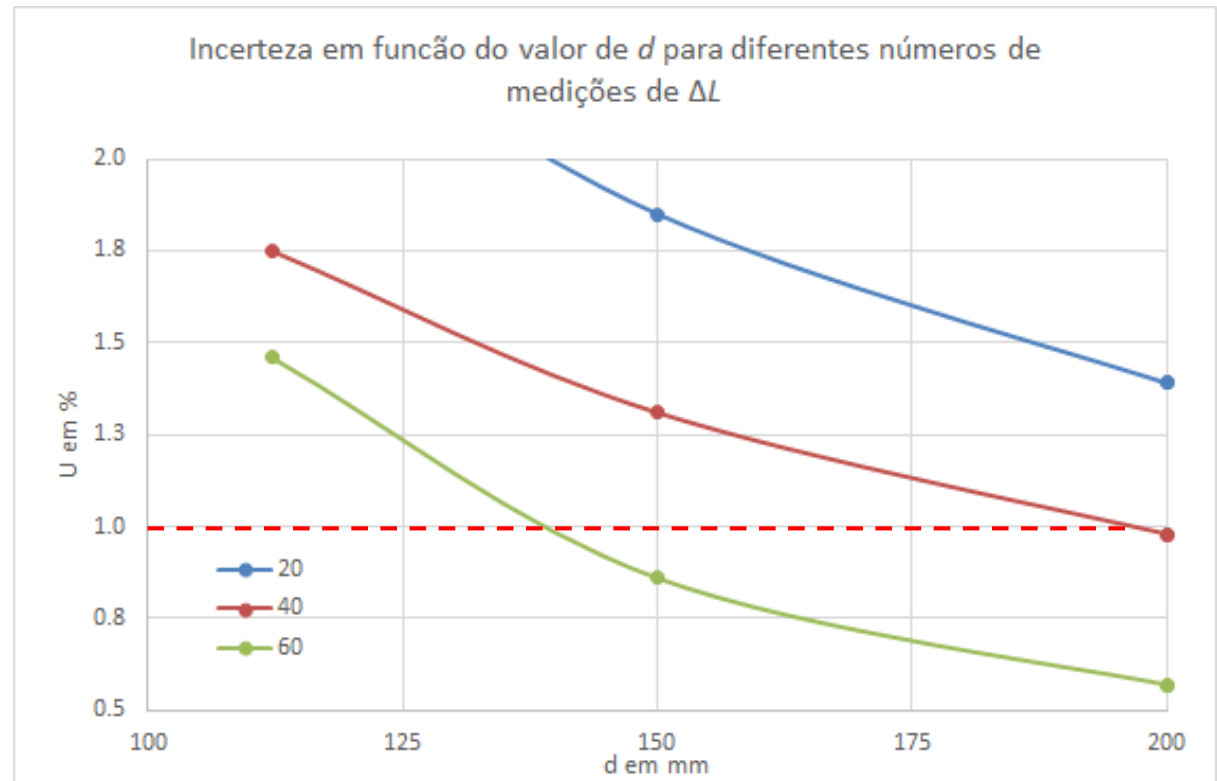
Grandeza	Valor Un.	Fonte de Incerteza	Desvio Padrão Un.	N. med.	Valor da comp. Un.	Tipo de avaliação	Divisor	Incerteza padrão Un. $[u(x_i)]$	Coefficient e sensib. Un. $[c_i]$	Comp. quadrática Un. $[c_i \cdot u(x_i)]^2$	graus lib. $[v_i]$	% da comp.
ΔL	66.6 mm	Dispersão	7.52 mm	40	1.189 mm	A / normal	1.00	1.189 mm	5.00E-03 mm ⁻¹	3.54E-05	39	87%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	5.00E-03 mm ⁻¹	2.08E-06	1E+99	5%
		Resolução	-	-	0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	5.00E-03 mm ⁻¹	2.08E-06	1E+99	5%
		Cert. Calib.	-	-	0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	5.00E-03 mm ⁻¹	5.63E-07	1E+99	1%
		Cert. Calib.	-	-	0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	5.00E-03 mm ⁻¹	5.63E-07	1E+99	1%
d	200.0 mm	Dispersão	0.02 mm	10	0.008 mm	A / normal	1.00	0.008 mm	-1.67E-03 mm ⁻¹	1.62E-10	9	0%
		Resolução	-	-	0.025 mm	B / retangular	1.73	0.014 mm	-1.67E-03 mm ⁻¹	5.78E-10	1E+99	0%
		Cert. Calib.	-	-	0.100 mm	B / normal	2.00	0.050 mm	-1.67E-03 mm ⁻¹	6.93E-09	1E+99	0%
nar	1.00027	Modelo	-	-	2.0E-05	B / retangular	1.73	1.2E-05	1.33E+00	2.37E-10	1E+99	0%
n_{água} 1.333 ± 0.013 0.98%										Σ 4.07E-05		
										Incerteza padrão combinada, u_c	6.38E-03	N. graus lib.
										Fator de expansão, k	2.05	51
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	0.013	(Absoluta)
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	1.0%	(Relativa)



OPTIMIZAÇÃO

- Podemos ter $d = 200$ mm com $N = 40$,
- Ou $d = 165$ mm com $N = 60$... ou qualquer outra combinação entre estes valores

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

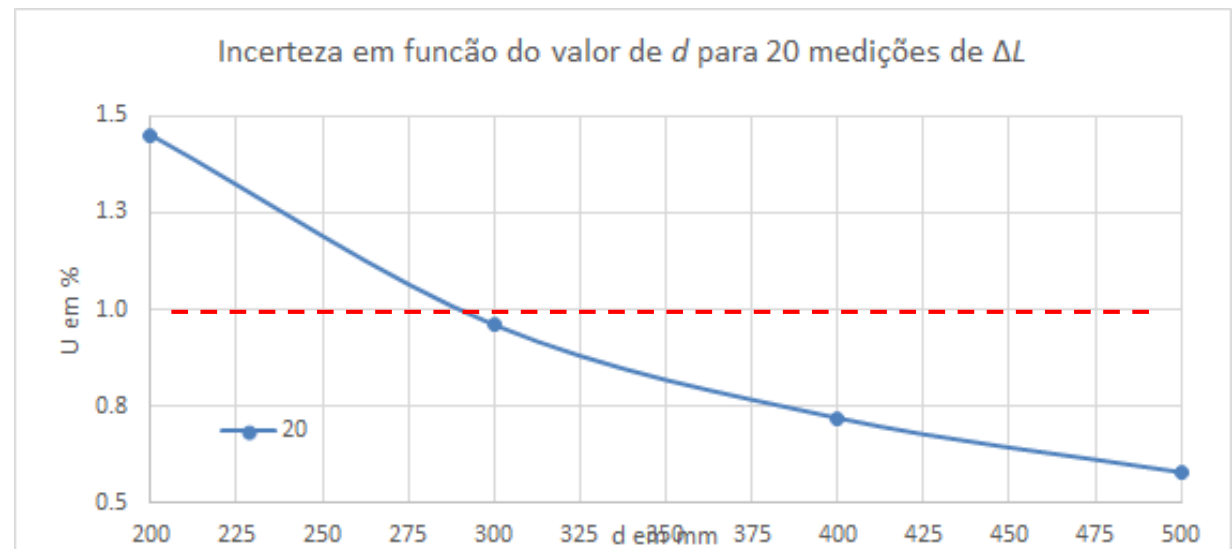


OPTIMIZAÇÃO

- Podemos aumentar ainda mais d e reduzir o número necessário de medições?... SIM!
- Usando como sistema de medição o Distanciómetro ... com menor resolução e maior incerteza ... mas, como já tínhamos visto, a incerteza e resolução em d quase não influenciam a incerteza.

- para $d = 300$ mm, basta realizar 20 medições (de ΔL e d , ambas com o distanciómetro) para ter uma incerteza expandida de 0,96% ... ou seja <1%

$$n_{agua} = \frac{\Delta L}{d} n_{ar} + n_{ar}$$



Trabalho Prático – medição do índice de refração com um distanciômetro laser

OPTIMIZAÇÃO

- Podemos aumentar ainda mais d e reduzir o número necessário de medições?... SIM!

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Medição do Índice de Refração da água com um Distanciômetro Laser

$$n_{\text{agua}} = \frac{\Delta L}{d} n_{\text{ar}} + n_{\text{ar}}$$

Grandeza	Valor Un.	Fonte de Incerteza	Desvio Padrão Un.	N. med.	Valor da comp. Un.	Tipo de avaliação	Divisor	Incerteza padrão Un. $[u(x_i)]$	Coefficient e sensib. Un. $[c_i]$	Comp. quadrática Un. $[c_i \cdot u(x_i)]^2$	graus lib. $[v_i]$	% da comp.
ΔL	99.9 mm	Dispersão	7.52 mm	20	1.682 mm	A / normal	1.00	1.682 mm	3.33E-03 mm ⁻¹	3.14E-05	19	84%
		Resolução	-		0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	3.33E-03 mm ⁻¹	9.26E-07	1E+99	2%
		Resolução	-		0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	3.33E-03 mm ⁻¹	9.26E-07	1E+99	2%
		Cert. Calib.	-		0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	3.33E-03 mm ⁻¹	2.50E-07	1E+99	1%
		Cert. Calib.	-		0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	3.33E-03 mm ⁻¹	2.50E-07	1E+99	1%
d	300.0 mm	Dispersão	7.52 mm	20	1.682 mm	A / normal	1.00	1.682 mm	-1.11E-03 mm ⁻¹	3.49E-06	19	9%
		Resolução	-		0.500 mm	B / retangular	1.73	0.289 mm	-1.11E-03 mm ⁻¹	1.03E-07	1E+99	0%
		Cert. Calib.	-		0.300 mm	B / normal	2.00	0.150 mm	-1.11E-03 mm ⁻¹	2.77E-08	1E+99	0%
n_{ar}	1.00027	Modelo			2.0E-05	B / retangular	1.73	1.2E-05	1.33E+00	2.37E-10	1E+99	0%
$n_{\text{água}} 1.333$										Σ 3.74E-05		
± 0.013 0.96%												
										Incerteza padrão combinada, u_c	6.12E-03	N. graus lib.
										Fator de expansão, k	2.10	26
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	0.013	(Absoluta)
										Incerteza expandida (nível de confiança de 95%) U	1.0%	(Relativa)

